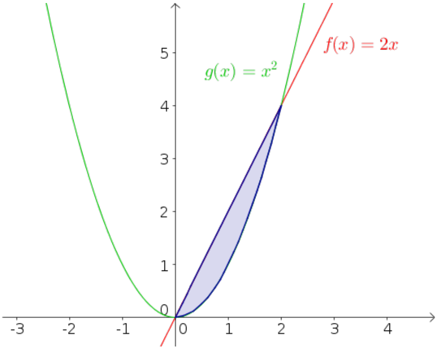
Integrais Duplas

Prof. Dr. Vinícius Wasques

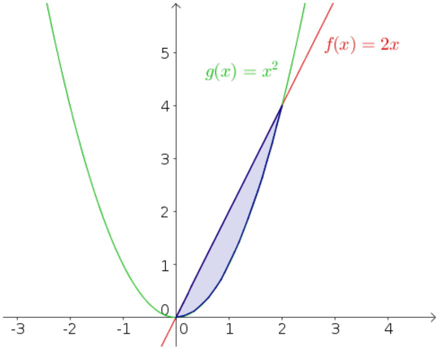
Universidade Paulista - Unip, Campus Swift Campinas

11 de maio de 2020

Regiões de integração

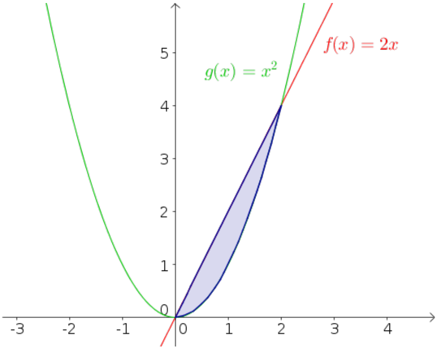


Regiões de integração



$$D_1 = \{(x,y) \ : \ 0 \leq x \leq 2 \quad \text{e} \quad g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

Regiões de integração



$$D_1 = \{(x, y) \ : \ 0 \leq x \leq 2 \quad \text{e} \quad g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \ : \ f(x) \leq x \leq g(x) \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq 4\}$$

Exemplo:

Calcule a seguinte integral dupla sobre a região D_1

$$\int\int_{D_1} (x + y) dD_1$$

Exemplo:

Calcule a seguinte integral dupla sobre a região D_1

$$\int\int_{D_1} (x+y)dD_1$$

$$D_1 = \{(x, y) \ : \ 0 \leq x \leq 2 \quad \text{e} \quad x^2 \leq y \leq 2x\}$$

Exemplo:

Calcule a seguinte integral dupla sobre a região D_1

$$\int\int_{D_1} (x+y)dD_1$$

$$D_1 = \{(x,y) \ : \ 0 \leq x \leq 2 \quad \text{e} \quad x^2 \leq y \leq 2x\}$$

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x+y)dydx$$

Exemplo:

Calcule a seguinte integral dupla sobre a região D_1

$$\int\int_{D_1} (x+y)dD_1$$

$$D_1 = \{(x,y) \ : \ 0 \leq x \leq 2 \quad \text{e} \quad x^2 \leq y \leq 2x\}$$

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x+y)dydx \quad = \quad \int_0^2 (xy + \frac{y^2}{2})\Big|_{y=x^2}^{2x} dx$$

Exemplo:

Calcule a seguinte integral dupla sobre a região D_1

$$\int\int_{D_1} (x+y)dD_1$$

$$D_1 = \{(x,y) \ : \ 0 \leq x \leq 2 \quad \text{e} \quad x^2 \leq y \leq 2x\}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x+y)dydx &= \int_0^2 (xy + \frac{y^2}{2})\Big|_{y=x^2}^{2x} dx \\
&= \int_0^2 \left(x.2x + \frac{(2x)^2}{2}\right) - \left(x.x^2 + \frac{(x^2)^2}{2}\right) dx
\end{aligned}$$

Exemplo:

Calcule a seguinte integral dupla sobre a região D_1

$$\int\int_{D_1}(x+y)dD_1$$

$$D_1 = \{(x,y)\ :\ 0 \leq x \leq 2 \quad \text{e} \quad x^2 \leq y \leq 2x\}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(x+y)dydx &= \int_0^2 (xy + \frac{y^2}{2})\Big|_{y=x^2}^{2x} dx \\
&= \int_0^2 \left(x.2x + \frac{(2x)^2}{2}\right) - \left(x.x^2 + \frac{(x^2)^2}{2}\right) dx \\
&= \int_0^2 2x^2 + \frac{4x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} dx
\end{aligned}$$

Exemplo:

$$\int_0^2 -x^3 - \frac{x^4}{2} + 2x^2 + \frac{4x^2}{2} dx \quad =$$

Exemplo:

$$\int_0^2 -x^3 - \frac{x^4}{2} + 2x^2 + \frac{4x^2}{2} dx \quad = \quad \int_0^2 -x^3 - \frac{x^4}{2} + 2x^2 + 2x^2 dx$$

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 -x^3 - \frac{x^4}{2} + 2x^2 + \frac{4x^2}{2} dx &= \int_0^2 -x^3 - \frac{x^4}{2} + 2x^2 + 2x^2 dx \\
&= \int_0^2 -x^3 - \frac{x^4}{2} + 4x^2 dx
\end{aligned}
$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 -x^3 - \frac{x^4}{2} + 2x^2 + \frac{4x^2}{2} dx &= \int_0^2 -x^3 - \frac{x^4}{2} + 2x^2 + 2x^2 dx \\
&= \int_0^2 -x^3 - \frac{x^4}{2} + 4x^2 dx \\
&= -\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} + 4\frac{x^3}{3}\bigg|_{x=0}^{2}
\end{aligned}$$

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 -x^3 - \frac{x^4}{2} + 2x^2 + \frac{4x^2}{2} dx &= \int_0^2 -x^3 - \frac{x^4}{2} + 2x^2 + 2x^2 dx \\
&= \int_0^2 -x^3 - \frac{x^4}{2} + 4x^2 dx \\
&= -\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} + 4\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{2} \\
&= -\frac{2^4}{4} - \frac{2^5}{10} + 4\frac{2^3}{3} - 0
\end{aligned}
$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 -x^3 - \frac{x^4}{2} + 2x^2 + \frac{4x^2}{2} dx &= \int_0^2 -x^3 - \frac{x^4}{2} + 2x^2 + 2x^2 dx \\
&= \int_0^2 -x^3 - \frac{x^4}{2} + 4x^2 dx \\
&= -\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} + 4\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{2} \\
&= -\frac{2^4}{4} - \frac{2^5}{10} + 4\frac{2^3}{3} - 0 \\
&= -\frac{16}{4} - \frac{32}{10} + 4\frac{8}{3} - 0
\end{aligned}$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 -x^3 - \frac{x^4}{2} + 2x^2 + \frac{4x^2}{2}dx &= \int_0^2 -x^3 - \frac{x^4}{2} + 2x^2 + 2x^2 dx \\
&= \int_0^2 -x^3 - \frac{x^4}{2} + 4x^2 dx \\
&= -\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} + 4\frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{2} \\
&= -\frac{2^4}{4} - \frac{2^5}{10} + 4\frac{2^3}{3} - 0 \\
&= -\frac{16}{4} - \frac{32}{10} + 4\frac{8}{3} - 0 \\
&= \frac{-16.30 - 32.12 + 32.40}{120} = \frac{416}{120}
\end{aligned}$$

Volume de sólido

Definição

Considere a função $f(x,y) \geq 0$*. Então o volume do sólido localizado acima da região de integração e abaixo da superfície* $z = f(x,y)$ *é dado por*

$$\int\int_D f(x,y)dD$$

Exemplo:

Calcule o volume do sólido abaixo da superfície $f(x, y) = 1 + 2xy$ e acima da região $D = \{(x, y) \ : \ 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 2\}$.

Exemplo:

Calcule o volume do sólido abaixo da superfície $f(x, y) = 1 + 2xy$ e acima da região $D = \{(x, y)\ :\ 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 2\}$.

$$\int_0^1 \int_0^2 (1 + 2xy)dydx$$

Exemplo:

Calcule o volume do sólido abaixo da superfície $f(x, y) = 1 + 2xy$ e acima da região $D = \{(x, y) \ : \ 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 2\}$.

$$\int_0^1 \int_0^2 (1 + 2xy) dydx \quad = \quad \int_0^2 (y + xy^2)\Big|_{y=0}^{2} dx$$

Exemplo:

Calcule o volume do sólido abaixo da superfície $f(x, y) = 1 + 2xy$ e acima da região $D = \{(x, y) \ : \ 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 2\}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^2 (1 + 2xy) dydx &= \int_0^2 (y + xy^2)\Big|_{y=0}^{2} dx \\
&= \int_0^1 \left(2 + x(2)^2\right) - (0) dx
\end{aligned}$$

Exemplo:

Calcule o volume do sólido abaixo da superfície $f(x, y) = 1 + 2xy$ e acima da região $D = \{(x, y)\ :\ 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 2\}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^2 (1 + 2xy) dydx &= \int_0^2 (y + xy^2)\Big|_{y=0}^{2} dx \\
&= \int_0^1 \left(2 + x(2)^2\right) - (0) dx \\
&= \int_0^1 (2 + 4x) dx
\end{aligned}$$

Exemplo:

Calcule o volume do sólido abaixo da superfície $f(x,y) = 1 + 2xy$ e acima da região $D = \{(x,y) \; : \; 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 2\}$.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^2 (1+2xy)dydx &= \int_0^2 (y + xy^2)\Big|_{y=0}^{2} dx \\
&= \int_0^1 \left(2 + x(2)^2\right) - (0)dx \\
&= \int_0^1 (2+4x)dx \\
&= (2x + 2x^2)\Big|_{y=0}^{1} = 2(1) + 2(1)^2 - 0 = 4
\end{aligned}
$$

Exercícios propostos

Resolva o primeiro exemplo para a região de integração D_2

- Os exercícios em preto são para praticar.
- Os exercícios em vermelho são para entregar.

Obrigado pela atenção!

Prof. Dr. Vinícius Wasques

email: vinicius.wasques@docente.unip.br

Departamento de Engenharia, Ciência da Computação e Sistemas de Informação

site: `https://viniciuswasques.github.io/home/`